

4 КЛАС

1. Розрізати фігуру, зображену на рисунку 1, по лініях сітки на чотири однакові частини, у кожній з яких є відмічена клітинка.

Розв'язання. Варіант розрізання наведено на рисунку 2.

2. П'ять гвинтиків, два шпунтики та три гайки важать стільки ж, скільки важать один гвинтик, сім шпунтиків і чотири гайки. Що важче: гвинтик чи шпунтик? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Один гвинтик важчий за один шпунтик. **Розв'язання.**

$5 \text{ гвинтиків} + 2 \text{ шпунтики} + 3 \text{ гайки} = 1 \text{ гвинтик} + 6 \text{ шпунтиків} + 4 \text{ гайки.}$

$\text{Звідси } 4 \text{ гвинтики} = 4 \text{ шпунтики} + 1 \text{ гайка.}$

Отже, один гвинтик важчий за один шпунтик.

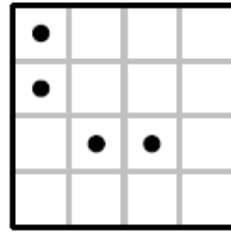


Рис. 1

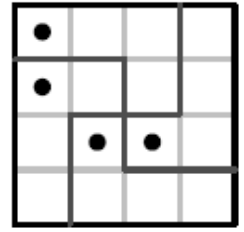


Рис. 2

3. Поштарка має конверти, упаковані по 100 штук у пачці. Вона вміє відраховувати по 5 конвертів за секунду. Їй треба приготувати три пачки: по 50, 70 та 80 конвертів. За який мінімальний час вона зможе це зробити? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. 10 секунд. **Розв'язання.** Щоб отримати пачку у 80 конвертів, достатньо відрахувати 20 конвертів за 4 секунди. Щоб отримати пачку з 70 конвертів, достатньо відрахувати 30 конвертів за 6 секунд. Склавши відраховані 20 та 30 конвертів разом, отримаємо третю пачку з 50 конвертів.

4. На дошці записані числа $1, 2, 3, \dots, 2026$. Сашко вибрав з них якісь 1014 чисел і перемножив їх. Дмитрик теж вибрав з них якісь 1014 чисел і теж їх перемножив. Коли хлопчики порівняли свої результати, виявилось, що вони відрізняються на 2025. Показати, що хоча б один з хлопчиків помилився. *Відповідь обґрунтувати.*

Розв'язання. Серед натуральних чисел від 1 до 2026 непарних чисел 1013. Тому серед 1014 вибраних чисел завжди знайдеться парне число, і добуток цих 1014 чисел – число парне. Тому і результати хлопчиків повинні відрізнятись на парне число. Тому хоча б один з хлопчиків помилився.

5. В 4 класі навчається 30 учнів, серед яких є ті, що дуже люблять математику, ті, що не дуже люблять математику і ті, що зовсім не люблять математику. Відомо, що серед кожних 15 учнів класу завжди є принаймні один, який дуже любить математику, а серед кожних 20 учнів класу завжди є принаймні один, який не дуже любить математику. Якою може бути найбільша кількість учнів цього класу, які зовсім не люблять математику? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. 3 учні. **Розв'язання.** Учні, які дуже люблять математику, не менше 16. Якби їх було 15 або менше, то можна було б вибрати групу з 15 учнів, серед яких не було б жодного, який дуже любить математику. Учні, які не дуже люблять математику, не менше 11. Якби їх було 10 або менше, можна було б вибрати групу з 20 учнів, серед яких не було б жодного, хто не дуже любить математику.

Щоб знайти найбільшу кількість учнів, які зовсім не люблять математику, треба від загальної кількості учнів класу відняти знайдені найменші значення для перших двох груп: $30 - 16 - 11 = 3$.

5 КЛАС

1. Мати наказала Сашку купити 2 огірки, 3 помідори і 6 перців. Але він все переплутав і на ці самі гроші купив 2 перця, 3 огірки і 6 помідорів. Розташувати овочі в порядку зростання їхньої ціни, якщо відомо, що огірок дорожчий за помідор. *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Помідор, перець, огірок. **Розв'язання.** Нехай ціна одного огірка x , одного помідора y , одного перця z . Тоді $2x + 3y + 6z = 2z + 3x + 6y$, звідки $4z = x + 3y$.

Оскільки $x > y$, то $4z > y + 3y = 4y$, звідки $z > y$ і $4z < x + 3x = 4x$, звідки $x > z$. Тому ціна перця знаходиться між ціною помідора та огірка.

2. Набір чисел вважається *хорошим*, якщо при видаленні будь-якого числа з цього набору числа, що залишилися, можна розбити на дві групи з рівними сумами. Чи буде *хорошим* набір непарних чисел $1, 3, 5, \dots, 2023, 2025, 2027$? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Ні. **Розв'язання.** У цьому наборі 1014 непарних чисел. Сума двох непарних чисел число парне. Тому сума всіх чисел набору парна. При видаленні будь-якого непарного числа сума чисел, що залишилися, буде непарною. Тому числа, що залишилися, не можна розбити на дві групи з рівними сумами.

3. Відстань 1500 м від дому до школи Сергій Забувайкін зазвичай долає за 20 хвилин. Якось виїшовши з дому і пройшовши деяку відстань, Забувайкін помітив, що забув вдома портфель. Тоді він розвернувся і побіг додому втричі швидше, ніж йшов до того, взяв портфель і відразу пішов знову до школи зі своєю звичайною швидкістю. В результаті на всю дорогу до школи Забувайкін витратив 36 хвилин. Яку відстань він встиг пройти, перш ніж помітив відсутність портфеля? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. 900 м. **Розв'язання.** Звичайна швидкість Забувайкіна $1500 : 20 = 75$ м/хв. Тоді його потроєна швидкість – 225 м/хв. На дорогу до школи Забувайкін витратив зайвих 16 хвилин. Коли він біг додому, його швидкість була у 3 рази більша за звичайну. Отже, на шлях додому Забувайкін витратив у 3 рази менше часу, ніж на повторний шлях. Відповідно, 4 і 12 хвилин. За 12 хвилин з звичайною швидкістю він проходить 900 м. Це і є відповідь.

4. Марійка та Сашко взяли з собою до гімназії по однаковій кількості цукерок і домовились їсти їх на кожній перерві по 2 або по 3 штуки. У Сашка перед 4 уроком залишилася лише одна цукерка, а в Марійки цукерки скінчились перед 6 уроком. Скільки цукерок кожен з них взяв з собою? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. 10 цукерок. **Розв'язання.** У Сашка перед 4 уроком залишилася одна цукерка. Пройшло 3 перерви. Значить, він з'їв від 6 до 9 цукерок. Тому спочатку в нього було від 7 до 10 цукерок. У Марійки перед 6 уроком цукерки скінчились. Оскільки пройшло 5 перерв, то вона з'їла від 10 до 15 цукерок. Тому у кожного з дітей було 10 цукерок.

5. Вінні Пух, Паць, Віслючок Іа та Сова провели коловий турнір з шахів (кожен зіграв з кожним по одному разу, перемога – 1 очко, нічия – 0,5 очка, поразка – 0 очок). Відомо, що чотири партії було зіграно внічию, а Вінні Пух набрав 0,5 очка. Сова стверджує, що вона за турнір набрала 2,5 очка. Чи могло таке статися? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Ні. **Розв'язання.** У турнірі 4 гравці, тому всього партій 6. Загальна сума очок також дорівнює 6. Вінні Пух набрав 0,5 очка, отже він зіграв одну партію внічию і програв 2 партії. Тому між Пацем, Іа та Совою всі три їхні партії закінчились унічию, і кожен з них отримав за них 1 очко. У двох партіях з Пухом були перемоги, тому двоє з них отримали ще по 1 очку, а один 0,5 очка. Отже, результати Паця, Віслючка Іа та Сови можуть бути тільки: 2, 2 і 1,5. Тому Сова не могла набрати 2,5.

6 КЛАС

1. Як не користуючись вимірними засобами, відрізати від шнура довжиною $\frac{2}{3}$ метра шматок довжиною $\frac{1}{2}$ м? *Відповідь обґрунтувати.*

Розв'язання. Оскільки $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3} : 4 = \frac{1}{6}$, то для того, щоб відрізати від шнура довжиною $\frac{2}{3}$ м шматок довжиною $\frac{1}{2}$ м, складемо шнур вдвічі, потім ще раз вдвічі. Отримаємо чотири рівні частини, довжина кожної з яких дорівнює $\frac{1}{6}$ м. Якщо відрізати одну таку частину, довжина шматка, що залишилась, буде як раз $\frac{1}{2}$ м.

2. Знайти всі двоцифрові числа, які дорівнюють подвоєному добутку своїх цифр.

Відповідь. 36. **Розв'язання.** Нехай \overline{xy} – шукане двоцифрове число. За умовою $10x + y = 2xy$. Оскільки $10x$ і $2xy$ – парні числа, то y теж парне число, причому $6 \leq y \leq 8$. Неважко переконатись простим перебором, що умові задачі задовольняє тільки число 6, звідки $x = 3$, а шукане число 36.

3. Мишко та Олесь вийшли зі школи на 12 хвилин пізніше Насті і пішли за нею. Мишко наздогнав Настю через 4 хвилини. Через скільки хвилин після виходу зі школи наздожене Настю Олесь, якщо він іде вдвічі повільніше за Мишка? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Через 12 хвилин. **Розв'язання.** Відстань, яку Мишко пройшов за 4 хвилини, Настя пройшла за $12 + 4 = 16$ хвилин. Тому швидкість Мишка в 4 рази більша за швидкість Насті. Відповідно, швидкість Олесь в 2 рази більша за швидкість Насті. Тому Олесь щохвилини «відвойовує» у Насті відстань, рівну її власній швидкості. А надолужити йому треба відстань, яку вона пройшла за 12 хвилин. Тому йому для цього знадобиться теж 12 хвилин.

4. На складі лежало кілька цілих голівок сиру. Вночі на склад прийшли миші й з'їли 10 голівок, причому всі їли порівну. Після цього у кількох мишей від переїдання заболів живіт. Решта 7 мишей наступної ночі доїла сир, що залишився, але кожна миша змогла з'їсти вдвічі менше сиру, ніж напередодні. Скільки голівок сиру було на складі спочатку? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. 11 голівок сиру. **Розв'язання.** Нехай всього було x мишей ($x > 7$). Тоді кожна миша з'їла в першу ніч по $10 : x$ голівок сиру. Другої ночі кожна миша з'їла вдвічі менше, тобто $5 : x$ голівок сиру. Всі 7 мишей з'їли тим самим $35 : x$ голівок сиру. $35 : x$ – ціле число. Єдиний дільник числа 35, що перевищує 7 – це саме число 35. Тому $35 : x = 1$. Тому всього на складі до навали мишей було $10 + 1 = 11$ голівок сиру.

5. В класі слухняних дівчаток стільки ж, скільки неслухняних хлопчиків. Кого в класі більше: слухняних дітей чи хлопчиків? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Порівну. **Розв'язання.** У класі є чотири групи дітей: слухняні дівчатка (СД), неслухняні дівчатка (НД), слухняні хлопчики (СХ), неслухняні хлопчики (НХ).

За умовою: Слухняні дівчатка = Неслухняні хлопчики (СД = НХ).

Слухняні діти = Слухняні дівчатка + Слухняні хлопчики (СД + СХ).

Хлопчики = Неслухняні хлопчики + Слухняні хлопчики (НХ + СХ).

Оскільки СД = НХ, то суми (СД + СХ) та (НХ + СХ) однакові. Тому слухняних дітей і хлопчиків у класі однакова кількість.

7 КЛАС

1. Для чисел x, y, z ($x \neq y$) виконуються співвідношення: $x^2(y + z) = 2026, y^2(x + z) = 2026$.

Знайти значення виразу $xy + zx + zy$. *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. 0. **Розв'язання.** $x^2(y + z) - y^2(x + z) = (x - y)(xy + zx + zy) = 0$, оскільки перший множник не дорівнює нулю, то $xy + zx + zy = 0$.

2. Є пластиковий косинець без поділок з кутами $30^\circ, 60^\circ$ і 90° . Треба побудувати кут в 15° . Як це зробити, не використовуючи інших інструментів?

Відповідь обґрунтувати.

Розв'язання. Трикутник ACA_1 прямокутний рівнобедрений, $\angle A_1AC = 45^\circ$ (рис. 3). Тоді $\angle A_1AB = \angle A_1AC - \angle BAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

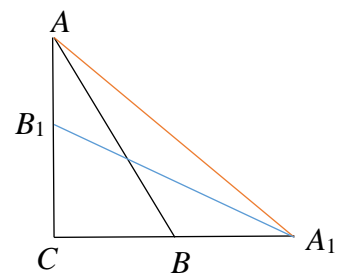


Рис. 3

3. Чи можна розставити числа від 1 до 2025 по колу так, щоб будь-яке з них ділилося на різницю своїх сусідів?

Відповідь. Ні. **Розв'язання.** Зауважимо, що непарне число не ділиться на парне, а отже, не може стояти в оточенні чисел однакової парності. Тому в кожного непарного числа один сусід має бути парним, а інший – непарним. Звідси випливає, що непарні числа стоять парами. Але серед чисел $1, 2, \dots, 2025$ непарних чисел 1013 і тому з них не можна утворити пари.

4. Сашко та Оленка купили по однаковій коробці чаю у пакетиках. Відомо, що одного пакетика вистачає на дві або три чашки чаю. Сашку коробки вистачило на 41 чашку чаю, а Оленці – на 58 чашок. Скільки пакетиків було у коробці?

Відповідь. 20 пакетиків. **Розв'язання.** В коробці не могло бути менше 20 пакетиків: якщо їх хоча б 19, то Оленка не зможе випити більше $19 \cdot 3 = 57$ чашок, а вона їх випила 58. З іншого боку, в коробці не могло бути більше 20 пакетиків: якщо їх хоча б 21, то Сашко не зміг би випити менше

$21 \cdot 2 = 42$ чашок, а він їх випив 41. Тим самим, у коробці було 20 пакетиків: Оленка заварила 18 пакетиків по 3 рази та 2 пакетики по 2 рази, а Сашко заварив один пакетик 3 рази та 19 пакетиків по 2 рази.

5. Чи можна розставити в квадраті 16×16 клітинок повний комплект для гри у «морський бій» (1 кораблик 1×4 , 2 кораблики 1×3 , 3 кораблики 1×2 і 4 кораблики 1×1) так, щоб у кожному стовпчику і в кожному рядку хоча б одна клітинка була зайнята?

Відповідь. Ні. **Розв'язання.** У нас є 10 корабликів. Якщо кораблик $1 \times k$ стоїть горизонтально, він займає один рядок та k стовпчиків, якщо вертикально, то k рядків і один стовпчик. У кожному з випадків кораблик займає $k + 1$ лінію, сумарно по вертикалі та по горизонталі.

Тоді кораблик 1×4 займає $4 + 1 = 5$ ліній, 2 кораблики 1×3 займають $2(3 + 1) = 8$ ліній, 3 кораблики 1×2 займають $3(2 + 1) = 9$ ліній, 4 кораблики 1×1 займають $4(1 + 1) = 8$ ліній.

Разом всі 10 корабликів займають не більше ніж $5 + 8 + 9 + 8 = 30$ ліній.

Але в квадраті 16×16 клітинок 16 рядків та 16 стовпчиків, тобто, 32 лінії.

Тому вказана в умові розстановка неможлива. Навіть за найефективнішої розстановки принаймні дві лінії залишаться порожніми.

8 КЛАС

1. Чи існує таке натуральне число n , що значення виразу $2^{178} + 2^{181} + 2^n$ є квадратом натурального числа?

Відповідь. Так, існує. **Розв'язання.** Нехай $n \geq 178$.

Тоді $2^{178} + 2^{181} + 2^n = 2^{178}(1 + 2^3 + 2^{n-178}) = 2^{178}(9 + 2^{n-178})$. Якщо, наприклад, $2^{n-178} = 2^4 = 16$, то $2^{178} + 2^{181} + 2^n = 2^{178} \cdot 25 = (5 \cdot 2^{89})^2$.

2. Петрик відпочивав у дитячому таборі. Після зміни він сказав, що в їхньому загоні в кожного було або 4 або 5 друзів, причому дітей, у яких було 5 друзів, чи то 7, чи то 8. Скільки насправді було дітей, у яких було по 5 друзів: 7 чи 8?

Відповідь. 8 дітей. **Розв'язання.** Позначимо кількість дітей, які мали 5 друзів, через x , а кількість дітей, які мали 4 друга, через y . Тоді сума кількостей друзів усіх дітей у загоні $5x + 4y$. Це число парне, оскільки кожна пара друзів порахована двічі. Тому $5x + 4y = 2n$, звідси x – парне число. Тому дітей, у яких 5 друзів, було 8.

3. У трикутнику ABC кут A прямий, BD і CE – бісектриси трикутника, а відрізки DK і EM – перпендикуляри до BC (рис. 4). Знайти градусну міру кута KAM .

Відповідь. 45° . **Розв'язання.** За властивістю бісектриси кута точка D рівновіддалена від сторін кута ABC , тому $AD = DK$. Аналогічно, $AE = EM$. Тоді трикутники ADK і AEM – рівнобедрені. $\angle CDK$ – зовнішній кут трикутника ADK .

Оскільки $\angle CDK = 90^\circ - \angle C$, то $\angle CAK = 45^\circ - \frac{1}{2} \angle C$. Аналогічно,

$$\angle BAM = 45^\circ - \frac{1}{2} \angle B.$$

$$\text{Тоді } \angle CAK + \angle BAM = 45^\circ - \frac{1}{2} \angle C + 45^\circ - \frac{1}{2} \angle B = 90^\circ - \frac{1}{2} (\angle B + \angle C) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Звідси $\angle KAM = 45^\circ$.

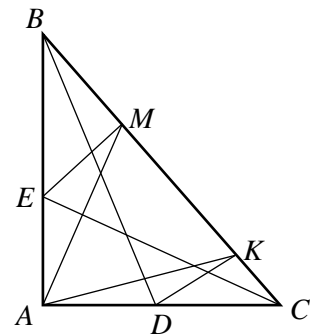


Рис. 4

4. Є 35 колод — довгих і коротких. Довгі колоди розпилюють на 5 частин, а короткі — на 4 частини. На всі короткі колоди знадобилося стільки ж розпилів, скільки на всі довгі. Скільки всього розпилів було зроблено?

Відповідь. 120 розпилів. **Розв'язання.** Оскільки кількість розпилів завжди на 1 менша, ніж кількість отриманих частин, то для довгої колоди (5 частин) потрібно 4 розпили, а для короткої колоди (4 частини) потрібно 3 розпили. Нехай довгих колод було x , а коротких y . Тоді $x + y = 35$. Крім того, за умовою $4x = 3y$. Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо $x = 15$, $y = 20$. Звідси розпилів $4 \cdot 15 + 3 \cdot 20 = 60 + 60 = 120$.

5. Голодні Малюк та Карлсон з'їли торт і стали ситі. Відомо, що ситий Малюк важче, ніж голодний Карлсон, а ситий Карлсон вдвічі важче за голодного Малюка. Що важить більше: голодний Малюк чи торт? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Торт важче голодного Малюка. **Розв'язання.** Нехай M – вага голодного Малюка, K – вага голодного Карлсона, T – вага торта, x – вага частини торта, яку з'їв Малюк, y – вага частини торта, яку з'їв Карлсон. За умовою $x + y = T$.

Вага ситого Малюка дорівнює $(M + x)$, а ситого Карлсона – $(K + y)$.

За умовою ситий Малюк важче за голодного Карлсона: $M + x > K$.

Також за умовою ситий Карлсон вдвічі важче за голодного Малюка: $K + y = 2M$, звідки $K = 2M - y$.

Підставимо це значення K у першу нерівність: $M + x > 2M - y$, звідки $x + y > M$.

Оскільки $x + y = T$, то, $T > M$.

9 КЛАС

1. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} (x + y)(x + y + z) = 72, \\ (y + z)(x + y + z) = 120, \\ (z + x)(x + y + z) = 96. \end{cases}$$

Відповідь. $(2; 4; 6)$; $(-2; -4; -6)$. **Розв'язання.** Склавши всі три рівняння системи, отримаємо рівняння $(x + y + z)(2x + 2y + 2z) = 288$, звідки $x + y + z = 12$ або $x + y + z = -12$. Підставивши замість $(x + y + z)$ числа 12 і -12 , отримаємо в першому випадку: $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$, в другому випадку: $x = -2$, $y = -4$, $z = -6$.

2. Діагоналі опуклого чотирикутника поділяють його на чотири трикутника. Виявилося, що сума площ двох протилежних трикутників (мають тільки спільну вершину), дорівнює сумі площ двох інших трикутників. Довести, що одна з діагоналей поділяється іншою діагоналлю навпіл.

Розв'язання. Нехай O – точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ ($AO \neq OC$), а точка M – середина діагоналі AC . Позначимо площі утворених трикутників так, як показано на рисунку 5.

За умовою $S_1 + S_5 + S_6 = S_4 + S_2 + S_3$. Крім того, $S_1 + S_2 = S_3$, оскільки це площі трикутників з рівними основами та спільною висотою. Аналогічно, $S_6 = S_4 + S_5$. Тоді $S_1 + S_5 + S_4 + S_5 = S_4 + S_2 + S_1 + S_2$, звідки $S_2 = S_5$. А оскільки трикутники BOM і DOM мають спільну висоту, то їхні основи рівні. Отже, $BO = OD$.

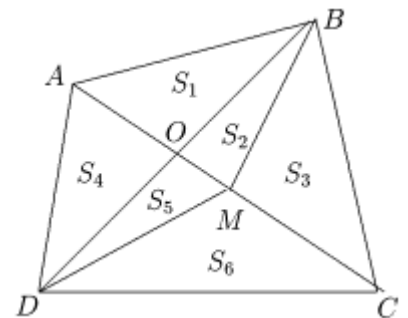


Рис. 5

3. На дошці були записані 10 послідовних натуральних чисел. Коли стерли одне з них, то сума 9 чисел, що залишились, виявилась рівною 12345. Яке число витерли?

Відповідь: 1370. **Розв'язання.** Нехай x – найменше з десяти чисел, а стерте число $x + y$, $0 \leq y \leq 9$.

Сума 10 послідовних чисел дорівнює $\frac{x + (x+9)}{2} \cdot 10 = 10x + 45$. Тоді $10x + 45 - (x + y) = 12345$,

звідки $9x = 12300 + y$. Сума $12300 + y$ повинна ділитися на 9. Враховуючи, що $0 \leq y \leq 9$, отримаємо, що $y = 3$. Отже, $x = 12303 : 9 = 1367$, а шукане число $1367 + 3 = 1370$.

4. Знайти усі такі натуральні числа n , для яких з трьох наступних тверджень два є правильними, а одне – хибне:

1) $n - 1$ є квадратом натурального числа;

2) $n - 23$ ділиться без остачі на 10;

3) $n - 90$ є квадратом натурального числа. *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. 2026. **Розв'язання.** Якщо $n - 23$ ділиться без остачі на 10, то число n закінчується цифрою 3. Але тоді два інші твердження хибні, оскільки точні квадрати не можуть закінчуватися цифрами 2 або 3. Таким чином, хибним може бути тільки друге твердження. Нехай тоді $n - 1 = k^2$ і $n -$

$90 = m^2$. Тоді $k^2 - m^2 = 89$ або $(k - m)(k + m) = 89$. Оскільки число 89 є простим, то $k = 45$ і $m = 44$. Звідси $n = 45^2 + 1 = 44^2 + 90 = 2026$. Неважко перевірити, що число 2026 задовольняє умові задачі.

5. На дошці записано рівняння $x^4 + \dots x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$. Двоє учнів по черзі ставлять замість крапок цілі числа. Учень, що ходить першим, прагне того, щоб після четвертого кроку утворилося рівняння, яке не має цілих коренів. Другий учень прагне, щоб рівняння мало хоча б один цілий корінь. Хто виграє при правильній стратегії? *Відповідь обґрунтувати.*

Відповідь. Виграє другий учень. **Розв'язання.** Нехай на третьому кроці гри (після другого ходу першого гравця) замість трьох крапок стоять деякі числа a , b і c . Якщо другий гравець своїм другим ходом поставить на останнє вільне місце число $-a - b - c - 1$, то число 1 буде коренем рівняння.